جامعة البعث | امتحانات الدورة التكميلية ٢٠١٦ـ٢٠١٧ | المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم | أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) | العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات | لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي | الاسم : [redacted]

السؤال الأول (١٠+١٠=٢٠ درجة):

١)- ليكن A مؤثر خطي ومحدود من فضاء هيلبرت H في نفسه أثبت أن :

المؤثر A متراص $\Leftrightarrow$ مرافقه A^* متراص .

٢)- ليكن $A:H\to H$ أثبت أن $\sigma(AA^*)$ لا يحوي أعداد سالبة .

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

ليكن $A:X\to Y$ مؤثر خطي و $\dim X = n<\infty$ أثبت أن A مؤثر منتهي البعد ومحدود ويكون $\dim R(A)\le n$.

السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- ليكن $A:H\to H$ مؤثراً موجباً . هل المؤثرات A^2,A^3,A^4,A^5 موجبة ؟ ماذا تستنتج ؟

ب)- ليكن I مؤثر المطابقة . هل المؤثرات $I , 2I , -I$ موجبة ؟ وهل يوجد جذور تربيعية موجبة للمؤثرات $I , -I$ ؟ في حال الإيجاب ما هي .

السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠درجة):

ليكن A مؤثر خطيا من فضاء باناخ B في نفسه وليكن λ و μ عددين من $\rho(A)$ أثبت أن :

١)- $R_\mu(A)-R_\lambda(A)= (\mu-\lambda)R_\mu(A)\,R_\lambda(A)$

٢)- $\sigma(\mu I) = \{\mu\}$ (I المؤثر المطابق) .

السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

ليكن $A:B\to B$ مؤثر خطي ومتراص من فضاء باناخ في نفسه أثبت أن نصف القطر الطيفي يعطى بالعلاقة :

$$r_{\sigma(A)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

انتهت الأسئلة | مدرس المقرر

حمص ٢٠١٧/٨/٣٠ م. | مع التمنيات بالنجاح والتوفيق | الدكتور سامح العرجه

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
امتحانات الدورة التكميلية ٢٠١٦-٢٠١٧
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعتان
العلامة: (١٠٠) درجة
الاسم :

جواب السؤال الأول (١٠+١٠=٢٠ درجة):

١)- ($\Leftarrow$): نعتبر في البداية أن المؤثر A متراص ، عندئذ توجد متتالية من المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0$ وبحسب مبرهنة سابقة فإن A_n^* مؤثرات منتهية .

لدينا أيضاً

$$\| A_n^* - A^* \| = \| (A_n - A)^* \| = \| A - A_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

أي أن المؤثر A^* هو نهاية متتالية من المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ، فهو متراص .

($\Rightarrow$) إذا كان A^* متراصاً فيكون مرافقه $A = (A^*)^*$ متراصاً . وبذلك يتم المطلوب .

٢)- بما أن $(AA^*)^* = AA^*$ فإن AA^* مترافق ذاتياً وحسب مبرهنة تكون طيفه حقيقي أي أن $\sigma(AA^*) \subset R$ وحتى نثبت أن $\sigma(AA^*)$ لا يحوي أعداد سالبة يكفي أن نثبت أن $-\lambda \in \rho(AA^*)$ من أجل $\lambda \in \sigma(AA^*)$ من أجل ذلك بحسب مبرهنة يكفي إثبات أن :

$$\|(AA^* - (-\lambda I))x\| \geq c\|x\| \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \forall x \in H$$

في الحقيقة لدينا ما يلي :

$$\|(AA^* + \lambda I)x\|^2 = \langle AA^*x + \lambda x, AA^*x + \lambda x \rangle = \langle AA^*x, AA^*x \rangle + \lambda \langle x, AA^*x \rangle +$$
$$+ \lambda \langle AA^*x, x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle =$$

$$= \underbrace{\|AA^*x\|^2}_{\geq 0} + \lambda \underbrace{\langle A^*x, A^*x \rangle}_{\geq 0} + \lambda \underbrace{\langle AA^*x, x \rangle}_{\geq 0} + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2 \quad , \quad \forall x \in H$$

وبالتالي $-\lambda \in \rho(AA^*)$ هو المطلوب ، وكذلك نفس الكلام بالنسبة لـ A^*A .

جواب السؤال الثاني (٢٠ درجة):

بما أن $\dim X = n$ فإن عدد عناصر القاعدة في X يساوي n وإن أي جملة مكونة من $n+1$ عنصر مرتبطة خطياً ، لناخذ $R(A) \subset Y$ ولنثبت أن $\dim R(A) \leq n$ ، لهذا الغرض يجب أن نبرهن أن أي جملة من العناصر مكونة من $n+1$ في $R(A)$ هي مرتبطة خطياً ، لتكن الجملة $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} \in R(A)$ عندئذ توجد العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$ بحيث $y_i = Ax_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, n+1$ وبما أن $\dim X = n$ فإن الجملة $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ مرتبطة خطياً

أي أنه توجد الأعداد التي ليست جميعها أصفار وهي $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ بحيث تتحقق المطابقة التالية $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0$ وبما أن A خطي فإن :

$$\alpha_1A(x_1)+\alpha_2A(x_2)+...+\alpha_nA(x_n)+\alpha_{n+1}A(x_{n+1})=$$

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\alpha_1A(x_1)+\alpha_2A(x_2)+...$$

$$=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n+\alpha_{n+1}y_{n+1}=A(0)=0$$

أي أن الجملة الاختيارية $y_1,y_2,...,y_n,y_{n+1}\in R(A)$ هي مرتبطة خطياً وهذا يعني أن $\dim R(A)\le n<\infty$ وهذا بدوره يكافئ أن المؤثر A منتهي البعد ، ولإثبات أنه محدود نفرض أن $e_1,e_2,...,e_n$ قاعدة لـ X أي أنه أياً كان $x\in X$ فإن $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ وبالتالي وبالاستفادة من خطية A

$$\|Ax\|=\left\|A\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}Ax_ie_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_iAe_i\right\|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|Ae_i\|\le\max\|Ae_i\|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=c\|x\|\qquad c=\max\|Ae_i\|$$

وبالتالي A محدود ، وهو المطلوب .

<u>جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة):</u>

أ)- لدينا من أجل $A:H\to H$ مؤثراً موجباً يكون :

$$(A^2x,x)=(AAx,x)=(Ax,A^*x)=(Ax,Ax)\ge0\ ,\forall x\in H$$

أي أن A^2 موجب.

$$(A^3x,x)=(AA^2x,x)=(A^2x,A^*x)=(A(Ax),Ax)\ge0\ ,\forall x\in H$$

أي أن A^3 موجب.

كما أن A^4 موجب لأن :

$$(A^4x,x)=(A^2x,A^2x)\ge0\ ,\forall x\in H$$

ويكون A^5 موجب لأن :

$$(A^5x,x)=(AA^4x,x)=(A(A^2x),A^2x)\ge0\ ,\forall x\in H$$

نستنتج مما تقدم أن A^n مؤثر موجب من أجل $n=1,2,3,...$.

ب)- $(Ix,x)=(x,x)=\|x\|^2\ge0\ ,\forall x\in H$ أي أن I موجب . وأيضاً يكون :

$$(2Ix,x)=2(Ix,x)=(x,x)=2\|x\|^2\ge0\ ,\forall x\in H$$

أما المؤثر $-I$ فإن : $(-Ix,x)=-(x,x)=-\|x\|^2\le0\ ,\forall x\in H$ فهو مؤثر غير موجب .

<u>**الجذور التربيعية :**</u> بما أن مؤثر موجب فله جذر تربيعي موجب هو $I^{\frac{1}{2}}=I$ لأن $I^2=I$

أما المؤثر $(-I)$ غير موجب فليس له جذر تربيعي .

جواب السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

١)- إثبات المساواة $R_\mu(A)-R_\lambda(A)=(\mu-\lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)$

$$R_\mu(A)-R_\lambda(A)=R_\mu(A)I-IR_\lambda(A)=R_\mu(A)(A-\lambda I)R_\lambda(A)-R_\mu(A)(A-\mu I)R_\lambda(A)=$$

$$=R_\mu(A)[(A-\lambda I)R_\lambda(A)-(A-\mu I)R_\lambda(A)]=R_\mu(A)[(A-\lambda I)-(A-\mu I)]R_\lambda(A)=$$

$$=R_\mu(A)[(\mu-\lambda)I]R_\lambda(A)=(\mu-\lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

٢)- بفرض أن $\mu\neq 0$ فإن $(\mu I)^{-1}$ موجود ومحدود في الفضاء التام B أي أن $\rho(\mu I)$ هو مجموعة كل الأعداد العقدية λ التي يكون من أجلها $(\mu I-\lambda I)^{-1}$ موجود ومحدود أي أن $\rho(\mu I)$ مؤلف مجموعة الأعداد العقدية λ بحيث يكون $((\mu-\lambda)I)^{-1}$ موجود ومحدود أي أن :

$$\rho(\mu I)=\{\lambda\in C;\lambda\neq\mu\}=C\setminus\{\mu\}$$

وبالتالي $\sigma(\mu I)=C\setminus\rho(\mu I)=C\setminus(C\setminus\{\mu\})=\{\mu\}$.

جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

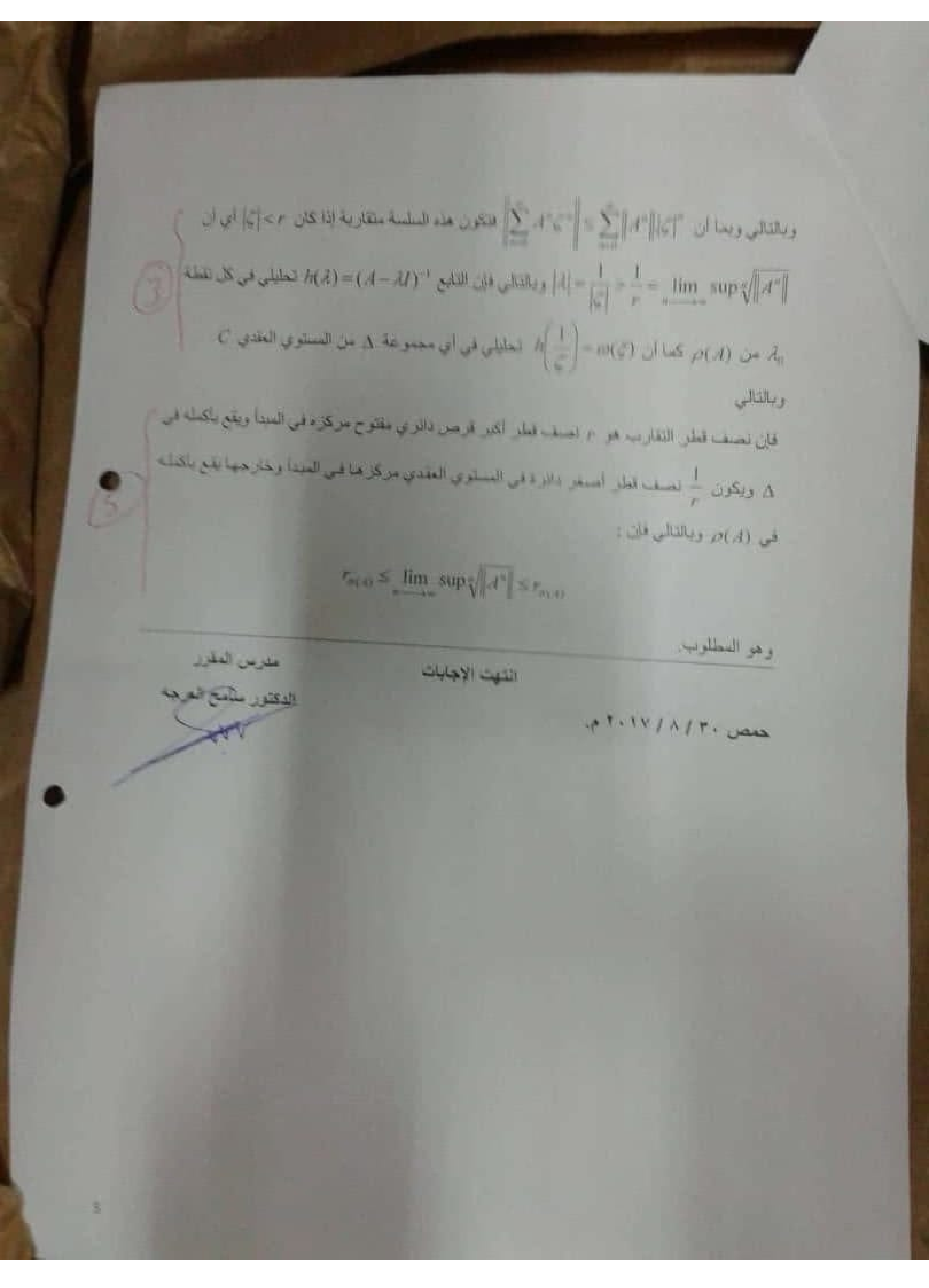
لدينا $\|A\|\leq|\lambda|$ أيا كان $\lambda\in\sigma(A)$ وبالتالي فإن $r_{\sigma(A)}\leq\|A\|$ ولما كان $\sigma(A^n)=[\sigma(A)]^n$ وبما أن $r_{\sigma(A^n)}\leq\|A^n\|$ فإن $r_{\sigma(A)}=\sqrt[n]{r_{\sigma(A^n)}}\leq\sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن :

$$r_{\sigma(A)}\leq\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{\|A^n\|}\leq\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

لدينا $\|A\|<|\lambda|$ ، $(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$ وبأخذ $\zeta=\frac{1}{\lambda}$ فإن :

$$(A-\lambda I)^{-1}=-\zeta\sum_{n=0}^{\infty}A^n\zeta^n \quad , \quad |\zeta|<\frac{1}{\|A\|}$$

وبما أن كل متسلسة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ لها نصف قطر تقارب r وتكون هذه المتسلسلة متقاربة عندما $|\zeta|<r$ وإن نصف قطر التقارب هذا يحسب من العلاقة $r=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}}$



وبالتالي وبما أن $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \zeta^n \right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| |\zeta|^n$ فتكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان $|\zeta| < r$ أي أن

$|\lambda| = \frac{1}{|\zeta|} > \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن التابع $h(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ تحليلي في كل نقطة

λ_0 من $\rho(A)$ كما أن $h\left(\frac{1}{\zeta}\right) = m(\zeta)$ تحليلي في أي مجموعة Δ من المستوي العقدي C

وبالتالي

فإن نصف قطر التقارب هو r نصف قطر أكبر قرص دائري مفتوح مركزه في المبدأ ويقع بأكمله في Δ ويكون $\frac{1}{r}$ نصف قطر أصغر دائرة في المستوي العقدي مركزها في المبدأ وخارجها يقع بأكمله في $\rho(A)$ وبالتالي فإن :

$$r_{\sigma(A)} \le \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|} \le r_{\sigma(A)}$$

وهو المطلوب.

مدرس المقرر

انتهت الإجابات

الدكتور سامح العرجة

حمص ٣٠ / ٨ / ٢٠١٧ م.